|  |  |
| --- | --- |
|  | 示例**：**在坐標平面中點的變換 |

目 標：直觀地描述在坐標平面中變換對點的影響，這些變換包括平移、以與*x-*軸平行的線作反射、繞原點以角度為90°的倍數旋轉

學習階段：3

學習單位：直角坐標系

所需教材：動態幾何軟件如*Cabri Geometry II*及*Cabri*檔案[Tra02.fig](file:///C%3A%5CUsers%5Cchunyuelee%5CDocuments%5CL%26T%20materials%5CMSS%5CTra02.fig)、[Tra03.fig](file:///C%3A%5CUsers%5Cchunyuelee%5CDocuments%5CL%26T%20materials%5CMSS%5CTra03.fig)、[Ref02.fig](file:///C%3A%5CUsers%5Cchunyuelee%5CDocuments%5CL%26T%20materials%5CMSS%5CRef02.fig)及[Rot02.fig](file:///C%3A%5CUsers%5Cchunyuelee%5CDocuments%5CL%26T%20materials%5CMSS%5CRot02.fig)

預備知識：懂得在坐標平面中找出點的坐標

活動內容：

1. 教師簡略介紹平移、反射及旋轉的幾何意義。
2. 教師派發工作紙1:「坐標平面中點的平移」予學生。學生須要運用*Cabri* 檔案[Tra02.fig](file:///C%3A%5CUsers%5Cchunyuelee%5CDocuments%5CL%26T%20materials%5CMSS%5CTra02.fig) 及[Tra03.fig](file:///C%3A%5CUsers%5Cchunyuelee%5CDocuments%5CL%26T%20materials%5CMSS%5CTra03c.fig) 去探討在坐標平面中平移對於點的影響及將結果寫在工作紙上。
3. 教師與學生討論工作紙1的答案並總結出( *x* , *y* ) →
( *x* + *a* , *y* + *b* ) 代表著一點經*a*單位水平平移、*b*單位鉛垂平移的變換。其中所述的點未必一定在網格上。
4. 教師派發工作紙2：「坐標平面中點的反射」及工作紙三：「坐標平面中點的旋轉」予學生。學生須要利用*Cabri* 檔案[Ref02.fig](file:///C%3A%5CUsers%5Cchunyuelee%5CDocuments%5CL%26T%20materials%5CMSS%5CRef02.fig) 及[Rot02.fig](file:///C%3A%5CUsers%5Cchunyuelee%5CDocuments%5CL%26T%20materials%5CMSS%5CRot02.fig) 來探討在坐標平面中反射及旋轉對點的影響，並將他們的發現寫在工作紙上。
5. 教師與學生討論工作紙的答案。
6. 對於工作紙2，教師可總結對於平行於*x*-軸的反射軸，該點的*x* 坐標保持不變。
7. 對於工作紙3，教師可總結出( *x* , *y* ) → ( *y* , − *x* ) 代表該點旋轉了90°。教師可引導學生發現旋轉180° 等同於旋轉90°兩次。

90°

90 °

180°

即 ( *x* , *y* ) → (*y* , − *x* ) → ( −*x* , − *y* ) 等同於 ( *x* , *y* ) → ( −*x* , − *y* )。

工作紙**1**: 坐標平面中點的平移

1. 圖1

開啟*Cabri*檔案[Tra02.fig](file:///C%3A%5CUsers%5Cchunyuelee%5CDocuments%5CL%26T%20materials%5CMSS%5CTra02.fig)。圖中標示著從原點*O*平移至點*P*的平移變換（看圖1）。
2. 點按**Points**按鈕，選取**Point**。將浮標移往平面的網格點中點按一下以產生一點。標示該點為*A*。
3. 點按 **Transformation**按鈕，選取**Translation**。分別點按點*A*及*OP*，將點*A*以給定的平移作變換。標示平移後的點為*A'*。在**Measure** 按鈕中選擇**Equation and Coordinate**。點選*A*及*A'*以量度其坐標（看圖2）。

圖2

1. 現在拖曳*A*點以觀察*A*及*A*'坐標的變化。在不改變平移變換的情況下，在表1上記錄一組*A*及*A*'坐標的數據。然後藉著拖曳點*P*以改變平移變換。記錄其他組的數據並填寫結果於同一表上。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 平移變換 | 點*A*的坐標 | 點*A'*的坐標 |
| 由*O*至( , ) | ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
| 由*O*至( , ) | ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
| 由 *O* 至( , ) | ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
|  | 結論 |  |
| 平移變換 | 點*A*的坐標 | 點*A*'的坐標 |
| 由*O*至(*a* , *b*) | ( *x* , *y* ) | ( , ) |

表1

1. 開啟*Cabri*檔案[Tra03.fig](file:///C%3A%5CUsers%5Cchunyuelee%5CDocuments%5CL%26T%20materials%5CMSS%5CTra03.fig)。你會發現點*P*並不在網格上。你在表1中的結論對於不在網格上的點是否仍然成立？

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(你可以重複上述步驟2及3進行探究以回答上述的問題。)

工作紙**2**: 坐標平面中點的反射

1. 開啟*Cabri*檔案[Ref02.fig](file:///C%3A%5CUsers%5Cchunyuelee%5CDocuments%5CL%26T%20materials%5CMSS%5CRef02.fig)。你會找到平行於*x*-軸的直線*L*。*P* 為直線上*L*的一點（看圖1）。

圖1

1. 點按**Points**按鈕，選取**Point**。將浮標移往平面上的網格點中，點按一下以產生一點。標示該點為*A*。
2. 點按**Transformation**按鈕，選取**Reflection**。分別點按點*A*及直線*L*，將點*A*以直線*L*反射。標示反射後的點為*A*'。在**Measure**按鈕中選擇**Equation and Coordinate**。量度*A*及*A*'的坐標（看圖2）。

圖2

1. 拖曳點*P*以致*L*為*x*-軸。拖曳點*A*以觀察*A*及*A'*坐標的變化。記錄一組*A*及其反射後的點*A'*的坐標於表1中並填寫結論。然後拖曳點*P*至(1, 2)，將*L*移往*x*-軸以上2單位。記錄另一組數據並填寫在表2。移動點*P*至(1,–3)以將*L*移往*x*-軸以下3單位。重複以上探究工作。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 反射軸(直線*L*) | 點*A*的坐標 | 點*A'*的坐標 |
| *x*-軸 | ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
|  | 結論 |  |
| *x*-軸 | ( *x* , *y* ) | ( , ) |

表1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 反射軸(直線*L*) | 點*A*的坐標 | 點*A'*的坐標 |
| *x*-軸以上2單位 | ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
|  | 結論 |  |
| *x*-軸以上2單位 | ( *x* , *y* ) | ( , ) |

表2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 反射軸(直線*L)* | 點*A*的坐標 | 點*A'*的坐標 |
| *x*-軸以下3單位 | ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
|  | 結論 |  |
| *x*-軸以下3單位 | ( *x* , *y* ) | ( , ) |

表3

工作紙**3**: 坐標平面中點的旋轉

1. 開啟*Cabri*檔案[Rot02.fig](file:///C%3A%5CUsers%5Cchunyuelee%5CDocuments%5CL%26T%20materials%5CMSS%5CRot02.fig)。你會找到一點*A*連接於原點*O* （看圖1）。

圖1

1. 點選**Display按鈕**，選取**Numerical Edit**。
2. 在繪圖視窗中點選適當位置以產生一互動數值。
3. 在方格盒中鍵入90。按**Ctrl U**以選取**Degree**。
4. 點選**Transformation**按鈕，選取**Rotation**。分別點按點*A*，原點*O*及數值90°，將點A沿原點*O*旋轉90°。標示旋轉後的點為*A'*。在**Measure**按鈕中選擇**Equation and Coordinate**。點選*A* 和 *A'*以顯示其坐標。
5. 點選**Lines**按鈕，選取**Segment**。畫線段*OA'*。點選**Display**按鈕，選取**Mark Angle**。按次序選擇*A*、*O*及 *A'*以標示直角*AOA'*（看下頁的圖2）。

圖2

1. 拖曳點*A*以觀察*A*及*A'*坐標的變化。記錄一組點*A*及旋轉後*A'*的坐標於表1。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 旋轉角 | 點*A*的坐標 | 點*A'*的坐標 |
| 90° | ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
|  | 結論 |  |
| 90° | ( *x* , *y* ) | ( , ) |

表1

1. 將旋轉角改為180°及隨後270°以收集另外兩組數據。將數據及結論總結在表2及3中。你可用以下步驟來改變旋轉角。
2. 雙按旋轉角。你會在角度的右面找到箭頭。
3. 按向上箭頭 或向下箭頭 以改變旋轉角至180°。
4. 拖曳點*A*至不同位置。記錄點*A*及其旋轉後的點*A'*的坐標於表2。
5. 以旋轉角為270°，重複(a)至(c)。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 旋轉角 | 點*A*的坐標 | 點*A'*的坐標 |
| 180° | ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
|  | 結論 |  |
| 180° | ( *x* , *y* ) | ( , ) |

表2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 旋轉角 | 點*A*的坐標 | 點*A'*的坐標 |
| 270° | ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
| ( , ) | ( , ) |
|  | 結論 |  |
| 270° | ( *x* , *y* ) | ( , ) |

表3

教師注意事項:

1. 本示例的目的是讓學生能直覺地描述變換對坐標平面上點的影響。學生只須從很多數據中進行研究及作出推論。其中所涉及的幾何證明只適合能力較高的學生。
2. 對於某些十分熟適*Cabri*的學生，教師可要求他們自行進行探索而不用提供有關的*Cabri*檔案。
3. 工作紙1的答案：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 平移變換 | 點*A*的坐標 | 點*A'*的坐標 |
| 由*O*至 ( *a* , *b* ) | ( *x* , *y* ) | ( *x* + *a* , *y* + *b* ) |

1. 工作紙2的答案:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 反射軸(直線*L*) | 點*A*的坐標 | 點*A'*的坐標 |
| *x*-軸 | ( *x* , *y* ) | ( *x* , − *y* ) |
| *x*-軸以上2單位 | ( *x* , *y* ) | ( *x* , 4 − *y* ) |
| *x*-軸以下3單位 | ( *x* , *y* ) | ( *x* , −6 − *y* ) |

1. 工作紙3的答案:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 旋轉角 | 點*A*的坐標 | 點*A*'的坐標 |
| 90° | ( *x* , *y* ) | ( *y* , − *x* ) |
| 180° | ( *x* , *y* ) | (− *x* , − *y* ) |
| 270° | ( *x* , *y* ) | (− *y* , *x* ) |

1. 在工作紙2，只討論反射軸為平行於*x*-軸的直線。教師可修改工作紙讓學生探討平行於*y*-軸的直線作為反射軸的影響。對於能力很高的學生，教師甚至可進一步探究反射軸為方程*y* = *x*的情況。由於此變換將點( *x* , *y* )改變為( *y* , *x* )，故此，這種變換稱為*逆變換*。
2. 在工作紙3，只討論以90°、180° 和270°為旋轉角的情況。教師可將工作紙中的旋轉角改為360°、−90°、 −180°、−270°及−360°。

8. 教師可參閱附錄**3**有關*Cabri Geometry II* 的按鈕資料。